Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 1

Vendredi 13 septembre

Le sujet comporte 2 pages.
*Les calculatrices **ne** sont **pas** autorisées.*
Le respect de la fiche de consignes de rédaction sera pris en compte dans la notation.

Exercice 1. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

$$(E): \quad x(x^2+1)y' - 2y = x^3(x-1)^2\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Partie A - Résolution de l'équation homogène

Q1. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x > 0$, on ait

$$\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

Q2. En déduire une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{2}{x(x^2+1)}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Q3. Donner l'équation homogène associée à (E) puis la résoudre sur $]0\,;+infty[$.

Partie B - Recherche d'une solution particulière

On cherche maintenant une solution particulière y_P de (E) sous la forme $y_P(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}z(x)$ où z est une fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Q4. Montrer que y_P est solution de (E) si et seulement si $z'(x) = (x-1)^2\,\mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x > 0$.

Q5. Justifier que la fonction $x \longmapsto -(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que c'est une primitive de la fonction $x \longmapsto (x-1)^2\,\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

Q6. En déduire l'expression d'une solution particulière y_P de (E).

Partie C - Conclusion

Q7. Déduire des parties A et B l'ensemble des solutions de (E) sur $]0\,;+\infty[$.

Q8. Déterminer l'unique solution de (E) telle que $y(1) = 2$.

Exercice 2. La chaînette (*d'après BCPST 2023*)

Dans une première partie, on démontre quelques propriétés concernant deux fonctions. Dans la seconde partie, ces fonctions sont utilisées dans le cadre d'un problème physique.

Partie A - Deux fonctions

On définit les deux fonctions ch et sh sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Q9. Étudier la parité des fonctions ch et sh.

Q10. Déterminer le signe de $\mathrm{ch}(x)$ et de $\mathrm{sh}(x)$ pour tout réel x.

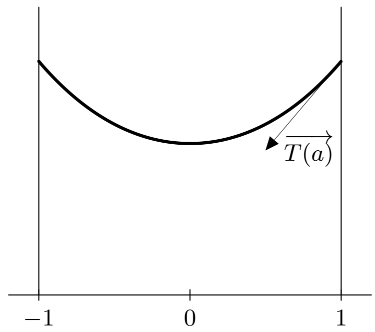
Q11. Justifier que les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ puis montrer que pour tout réel x,

$$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x).$$

Q12. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction sh.

Partie B - Tension

On admet que si on tend un câble entre deux poteaux, le câble n'étant soumis qu'à son propre poids et accroché des deux côtés à la même hauteur, alors il prend la forme d'une *chaînette* (cf illustration ci-contre).



On peut déterminer la tension du câble au niveau d'un poteau (vecteur force représenté ci-contre) : elle est égale à

$$T(a) = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{a}\right),$$

où a est un réel strictement positif (dépendant de la longueur du câble et de la distance entre les deux poteaux) et ch la fonction définie dans la partie précédente.

Le but de cette partie est de déterminer la valeur du paramètre a pour laquelle la tension au niveau des poteaux est minimale.

On introduit la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$\forall x \geqslant 0,\ g(x) = \mathrm{ch}(x) - x\,\mathrm{sh}(x),$$

où ch et sh sont les deux fonctions définies dans la partie précédente.

Q13. Justifier que $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1-x}{2}\,\mathrm{e}^x$ puis en déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Q14. Dresser le tableau de variations de g sur $[0\,;+\infty[$. On y fera figurer les valeurs et limites aux bornes de l'intervalle.

Q15. Rappeler le théorème de la bijection.

Q16. Montrer que l'équation $\mathrm{ch}(x) = x\,\mathrm{sh}(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, admet une unique solution sur $[0\,;+\infty[$. Dans la suite, on note m cette solution.

Q17. Montrer alors que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\mathrm{ch}(x) \geqslant x\,\mathrm{sh}(x)$ si et seulement si $x \in [0\,;m]$.

Q18. Montrer que

$$\forall a > 0,\ T'(a) = \mathrm{ch}\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{a}\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{a}\right).$$

Q19. En déduire la valeur de a pour laquelle la tension $T(a)$ est minimale.